# Лабораторная работа №2 Решение задачи линейного программирования (ЗЛП) графическим и переборным методами

# Графический метод решения ЗЛП

## Пример

**найти **max{ Z=2x1 + 3x2} при следующих ограничениях на значения переменных x1 и x2

2x1 + x2  6 ограничение (1),

x1  + 2x2  8 ограничение (2),

x1 - x2  1 ограничение (3),

x1  2 ограничение (4)

x1  0 (5), x2  0 (6).

Графический метод решения ЗЛП может быть реализован только в двумерном случае.

**1 этап. Построение области допустимых решений**

*Цель – построить область, каждая точка которой удовлетворяет всем ограничениям.*

Каждое из шести ограничений геометрически задает полуплоскость. Для того, чтобы ее построить, нужно:

* заменить в ограничении знак неравенства на равенство (получим уравнение прямой);
* построить прямую по двум точкам;
* определить, какую полуплоскость задает знак неравенства. Для этого подставить в неравенство какую-нибудь точку (например, начало координат). Если она удовлетворяет неравенству – закрашиваем полуплоскость, ее содержащую.

Такие действия выполняем для всех ограничений. Каждую из прямых обозначим номерами, принятыми при нумерации ограничений (см. рис).

**Областью допустимых решений** (удовлетворяющей всем ограничениям) является множество точек первого квадранта координатной плоскости (x1, x2), представляющее собой пересечение всех полуплоскостей, определяемых неравенствами ограничений.

X1 2 3

5

G

D K 4

E C

F

1

A X2

0 B J 6

Множество точек, удовлетворяющих всем шести ограничениям задачи – многоугольник AFEDCB.

**2 этап Построение линий уровня целевой функции и определение точки максимума**

*Цель - найти в построенном многоугольнике AFEDCB точку, в которой функция цели Z=2x1 + 3x2 принимает максимальное значение.*

Проведем прямую 2x1 + 3x2 = Сonst (линию уровня) так, чтобы она пересекала многоугольник AFEDCB (например, Const=10). Эта линия уровня на рисунке изображена пунктирной линией.

Если рассматривать значения линейной целевой функции Z на множестве точек (x1,x2), принадлежащих отрезку пунктирной прямой, расположенному внутри шестиугольника, то все они равны одному и тому же значению (Const=10).

Определим направление возрастания функции. Для этого построим линию уровня с бОльшим значением. Это будет прямая, параллельная с построенной, но расположенная правее. Значит, в заданном направлении значение целевой функции возрастает, и в наших интересах сдвинуть ее как можно дальше в этом направлении.

Сдвиг можно продолжать до тех пор, пока перемещаемая прямая пересекает многоугольник допустимых решений. Последнее положение прямой, когда она имеет одну общую точку с многоугольником AFEDCB (точка С), соответствует максимальному значению целевой функции Z и достигается в точке С с координатами x1= 4/3 (1.333), x2 =10/3 (3.333). При этом Z = 38/3 ( 12.667).

Поставленная задача полностью решена. Из проведенных геометрических рассуждений видно, что решение единственное. Сделаем некоторые обобщения, вытекающие из геометрической интерпретации задачи.

***Первое*.** Область допустимых решений – выпуклый многоугольник

***Второе*.** Максимум целевой функции достигается в вершине многоугольника допустимых решений

## Задание 2.1 (выполнить на занятии, показать преподавателю) по 1 баллу за каждую задачу

Решить графическим методом

|  |  |
| --- | --- |
| А) F=2x1+3x2  max  При ограничениях  x1+3x2 ≤ 18  2x1+x2 ≤ 16  x2 ≤ 5  3x1 ≤ 21  x1 ≥ 0 x2 ≥ 0 | B) F=4x1+6x2  min  При ограничениях  3x1+x2 ≥ 9  x1+2x2 ≥ 8  x1+6x2 ≥ 12  x1 ≥ 0 x2 ≥ 0 |
| C) F=3x1+3x2  max  При ограничениях  x1+x2 ≤ 8  2x1-x2 ≥ 1  x1-2x2 ≤ 2  x1 ≥ 0 x2 ≥ 0 | D) F=2x1-3x2  min  При ограничениях  x1+x2 ≥ 4  2x1-x2 ≥ 1  x1-2x2 ≤ 1  x1 ≥ 0 x2 ≥ 0 |

## Задание 2.2 (индивидуальное, по вариантам. Номер варианта см. в журнале) 2 балла

Найти минимум и максимум целевой функции графическим методом.

Выполнить проверку, используя *Поиск решения* или Wolfram|Alpha.



# Переборный метод

## Теоретические основы переборного метода

Переборный метод решения основан на следующей основной теореме:

**Если целевая функция имеет максимум (минимум), то он достигается в крайней точке (вершине) области допустимых решений.**

Поэтому для поиска максимума или минимума целевой функции следует:

* перебрать все вершины области допустимых решений;
* для каждой вершины найти значение целевой функции;
* выбрать вершину, в которой достигается оптимальное значение.

Основной вопрос: **как осуществить поиск вершин**?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим **геометрическую интерпретацию ЗЛП**.

Рассмотрим ЗЛП, имеющую ограничения в виде неравенств

a1,1x1+a1,2x2+…+a1,nxn ≥ b1,

a2,1x1+a2,2x2+…+a2,nxn ≥ b2,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .,

am,1x1+am,2x2+…+am,nxn ≥bm,

*Примечание*: если в задаче имеется ограничение-равенство, то замените его на два неравенства со знаками ≥ ≤

Дадим геометрическую интерпретацию для задач размерности 2, 3. Сделаем выводы для произвольной задачи.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Размерность задачи (N)** | | |
| **N = 2** | **N = 3** | **N > 3** |
| **Ограничение, взятое со знаком равно** | | |
| a1,1x1+a1,2x2 = b1,  прямая | a1,1x1+a1,2x2+a1,3x3 = b1  плоскость | a1,1x1+a1,2x2+…+a1,nxn = b1  гиперплоскость |
| **Ограничение** | | |
| a1,1x1+a1,2x2 ≥ b1,  полуплоскость | a1,1x1+a1,2x2+a1,3x3 ≥ b1  полупространство | a1,1x1+a1,2x2+…+a1,nxn ≥ b1  полугиперпространство |
| **Область допустимых решений** | | |
| Многоугольник | Многогранник | Гипермногогранник |
| **Вершина образуется в результате пересечения…** | | |
| двух прямых | трех плоскостей | N гиперплоскостей |

**Вывод:** для того, чтобы получить вершину области допустимых решений, нужно:

1. из системы ограничений взять N ограничений (где N – количество неизвестных);
2. записать их со знаком равно, составить систему линейных уравнений;
3. решить систему;
4. **проверить, является ли полученная точка вершиной (!!!)**. Для этого нужно подставить ее во все ограничения системы. Если она удовлетворяет всем ограничениям – это вершина.

Чтобы получить **все вершины**, нужно выполнить пункт 1 **всеми возможными способами**. Если M – число ограничений, N – число неизвестных, то число способов равно 

## Пример

Решить ЗЛП переборным методом:



**Решение:**

M = 5 – число ограничений, N = 3 – число неизвестных.

Для нахождения вершин будем выбирать по 3 ограничения. Это можно сделать  способами.

Каждый вариант будем кодировать последовательностью из 1 и 0 (1 – ограничение взяли, 0 – ограничение не взяли). Длина последовательности равна 5, количество единиц – 3.

### 1) 1 1 1 0 0



Решение (0, 2, 1) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (0, 2, 1) = 1

### 2) 1 1 0 1 0



Решение (2, 0, 1) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (2, 0, 1) = 3

### 3) 1 1 0 0 1



Система не имеет решения

### 4) 1 0 1 1 0



Решение (0, 0, 2) – не вершина (не проходит по второму ограничению)

### 5) 1 0 1 0 1



Решение (0, 4, 0) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (0, 4, 0) = 4

### 6) 1 0 0 1 1



Решение (4, 0, 0) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (4, 0, 0) = 8

### 7) 0 1 1 1 0



Решение (0, 0, 1) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (0, 0, 1) = -1

### 8) 0 1 1 0 1



Система не имеет решения

### 9) 0 1 0 1 1



Система не имеет решения

### 10) 0 0 1 1 1



Решение (0, 0, 0) – вершина (проходит по всем ограничениям)

f (0, 0, 0) = 0

**Ответ:**

Область допустимых решений имеет 6 вершин

f (0, 2, 1) = 1

f (2, 0, 1) = 3

f (0, 4, 0) = 4

f (4, 0, 0) = 8 - максимум

f (0, 0, 1) = -1 - минимум

f (0, 0, 0) = 0

## Задание 2.3 (индивидуальное) 1 балл

Решить переборным методом задание 2.2 (свой вариант), сравнить ответ и количество полученных вершин. Ответ выписать как в примере выше (все вершины и значения функции в них)

## Задание 2.4 (индивидуальное) 2 балла

Решить переборным методом задачу своего варианта. Расчеты проводить в электронных таблицах. Решение систем осуществлять с помощью обратной матрицы или методом Крамера. Ответ выписать как в примере выше (все вершины и значения функции в них).

Выполнить проверку, используя *Поиск решения* в электронных таблицах или Wolfram|Alpha (по вашему выбору). Если ответы не совпали – объяснить, почему это могло произойти.

### Вариант 1



### Вариант 2

### 

### Вариант 3



### Вариант 4



### Вариант 5



### Вариант 6



### Вариант 7



## Задание 2.5 (не обязательное, за дополнительные баллы, до 5 баллов за 1 метод)

Программа.

Выберите один из методов, реализуйте его на ЭВМ. Чтение данных - из файла.